

Відбір команди України на 55-ту міжнародну математичну олімпіаду, 2014

III тур

*Бич людини - це уявлюване знання
Монтень*

7. Для кожного натурального $n \geq 4$ знайдіть найменше натуральне число k , яке задовольняє таку властивість: для довільного розташування k фішок двох кольорів по клітинках дошки розміром $n \times n$ (не більше однієї фішки в клітинці), з них можна вибрати такий непорожній набір, що у кожному рядку і кожному стовпчику стоїть парна (можливо, нульова) кількість фішок кожного кольору.

8. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло ω з центром O . Припустимо, що кути B і C тупі і прямі AD і BC не паралельні. Прямі AB і CD перетинаються в точці E . Нехай P і R – основи перпендикулярів опущених з точки E на прямі BC і AD відповідно. Q – точка перетину EP і AD , S – точка перетину ER і BC . Нехай K – середина відрізка QS . Доведіть, що точки E , K і O колінеарні.

9. Нехай m, n непарні взаємно прості натуральні числа. Знайдіть усі пари цілих чисел a, b для яких система рівнянь:

$$\begin{cases} x^m + y^m + z^m = a, \\ x^n + y^n + z^n = b, \end{cases}$$

має безліч розв'язків у цілих числах x, y, z .