

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2014 год. 9 класс. 1 тур

1. Найдите наибольшее K такое, что любые положительные числа a, b, c , удовлетворяющие неравенству $a + b + c \leq K$, удовлетворяют также неравенству $abc \leq K$.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B, D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?

3. Все клетки квадратной таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает k клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну еще не закрашенную клетку с номером a , если для нее выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим, чем a ; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим, чем a . При каком наименьшем k Петя, независимо от исходной нумерации, за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы?

4. Докажите, что для любого натурального k , существует арифметическая прогрессия $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_k}{b_k}$ рациональных чисел такая, что для любого $i = \overline{1, k}$ числа a_i и b_i – взаимно просты, и все числа $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ различны.