

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2014 год. 8 класс. 1 тур

1. Числа a, b, c таковы, что $a + b > 0, b + c > 0, a + c > 0$. Докажите, что

$$a + b + c > \frac{|a| + |b| + |c|}{3}.$$

2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH . Биссектрисы углов CHB и CHA пересекают катеты CB и CA в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что середина отрезка A_1B_1 лежит на средней линии треугольника ABC .

3. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2 . Петя ходит по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо ходом по горизонтали или по вертикали переставить ладью из клетки с номером a в клетку с номером большим, чем a . Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

4. Найдите все пары целых неотрицательных чисел (a, b) таких, что число $3^a + 7^b$ является точным квадратом.