

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2013 год. 11 класс. 1 тур

1. Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + y^2$, если $|x - y| \leq 2$ и $|3x + y| \leq 6$.
2. Существует ли бесконечная последовательность простых чисел p_1, p_2, \dots такая, что $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ для всех натуральных n ?
3. Из доски 2013×2013 вырезали центральный квадрат 2011×2011 . На получившемся поле Настя и Влад играют в следующую игру: в начальной позиции две фишки (белая и черная) стоят на клетках имеющих общую сторону. За один ход каждый игрок может передвинуть любую фишку на соседнюю по стороне клетку, если она не занята другой фишкой. Проигрывает тот, после хода которого какая-то из комбинаций расположения фишек с учетом их цвета повторилась. Кто выигрывает при правильной игре, если первым ходит Влад?
4. Пусть ω – описанная окружность треугольника ABC . Точка D – середина дуги BAC , а I – центр вписанной окружности ABC . Прямая DI пересекает прямую BC в точке E , а окружность ω второй раз в точке F . Пусть P – точка на прямой AF такая, что PE параллельна AI . Докажите, что PE – биссектриса угла BPC .