

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2013 год. 8 класс. 1 тур

1. Известно, что $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Какие значения может принимать выражение $(a+b)(b+c)(c+a)$?
2. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) , для которых $4(mn + 1)$ делится на $(m + n)^2$.
3. В городе есть три школы A , B и C . Среди любой тройки учеников по одному из каждой школы есть двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что либо в школе A есть ученик знакомый со всеми из B , либо в школе B есть ученик знакомый со всеми из C , либо в школе C есть ученик знакомый со всеми из A .
4. Пусть ABC – равнобедренный треугольник с основанием BC . Точки D и M – середины сторон BC и AB соответственно. Точка X такова, что $XB \perp AC$ и $DX \parallel AB$. Прямые BX и AD пересекаются в точке H . Пусть P точка пересечения прямой DH с окружностью, описанной около треугольника AHX . Докажите, что касательная к описанной окружности треугольника AMP , проведенная в точке A , параллельна BC .