Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2015 г., 11 класс

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$2 - |x| - |y| = \sqrt{(1-|x|)^2 + (1-|y|)^2}.$$

2. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Известно, что $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \sin\gamma$. Найдите угол γ.

3. Докажите, что уравнение $x^2 - 5x - 4\sqrt{x} + 13 = 0$ не имеет действительных корней.

4. Пусть M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Точка D выбрана на катете AC так, что $CM = CD$. Точка P – вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AMC и BDA. Докажите, что AP – биссектриса угла CAB.

5. Решите в натуральных числах уравнение $21^n + 4^m = k^2$.

6. Комитет из 3366 кинокритиков голосует за кандидатов на премию Оскар. Каждый критик может отдать свой голос ровно за одного актера и ровно за одну актрису. После голосования выяснилось, что для каждого натурального числа n от 1 до 100 есть ровно один актер или актриса, за которого проголосовали ровно n раз. Докажите, что найдутся два критика, проголосовавших за одного и того же актера и за одну и ту же актрису.