Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2017 г.

I тур

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. Добуток трьох чисел $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab} = 3{*}{*}{*}{*}{*}{*}1$ є восьмицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 1. Цифри a, b, c попарно різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

3. Доведіть, що при будь-якому значенні параметру a рівняння

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1 = 0$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

4. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Яке найвище місце зможе наприкінці чемпіонату посісти команда, що у той момент була на 8-му місці?

5. У гострокутному нерівнобедреному трикутнику ABC проведені висоти BB_1 та CC_1, які перетинаються в точці H. Нехай L_1 та L_2 основи бісектрис трикутників B_1AC_1 та B_1HC_1, що проведені з вершин A та H відповідно. Описані кола трикутників AHL_1 та AHL_2 вдруге перетинають пряму B_1C_1 у точках P та Q відповідно. Доведіть, що точки B, C, P та Q лежать на одному колі.

II тур

1. Найдите сумму углов α и β, если известно, что оба угла лежат в промежутке $[0, \pi]$ и выполнены равенства

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

2. В школьной столовой дети выстроились в очередь за булочками. Оказалось, что если взять любых двух девочек и выбрать любого ребёнка, стоящего между ними, то он будет знаком по крайней мере с одной из них. Докажите, что в очереди найдутся два ребёнка, стоящих рядом, среди знакомых которых есть все девочки. Мы считаем, что любая девочка знакома сама с собой.

3. В треугольнике ABC точка D – середина стороны BC. Окружность ω_b проходит через точку D и касается прямой AB в точке B, окружность ω_c проходит через точку D и касается прямой AC в точке C. Окружности ω_b и ω_c пересекаются в точке M, отличной от D. Точка M' симметрична M относительно BC. Докажите, что M' лежит на AD.

4. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполнены условия: $f(mn) = f(m)f(n)$ и число $f(m) + f(n)$ делится на $m + n$.