Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2016 г.

I тур

1. Сравните три числа: $A = 11$, $B = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{2015} 2016$ и $C = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{2016} 2015$.

2. На доске записаны 4 натуральных числа. На каждом шаге можно стереть любые два из написанных чисел a, b и записать вместо них числа $a+b$, ab. С самого начала были записаны числа 1, 3, 6 и 10. Можно ли получить через несколько шагов на доске записанными числа:
а) 2016, 2017, 2019, 2022; б) 2015, 2016, 2017, 2018?

3. Найдите все тройки положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих условиям:

$$ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right) = bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = ac\left(1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right).$$

4. В остроугольном разностороннем треугольнике ABC проведена медиана AM. Ее продолжение пересекает описанную окружность ω этого треугольника в точке P. Пусть AH_1 – высота $\triangle ABC$, H – точка пересечения его высот. Лучи MH и PH_1 пересекают окружность ω в точках K и T соответственно. Докажите, что описанная окружность $\triangle KTH_1$ касается отрезка BC.

5. Задана полоса $1 \times n$, $n \geqslant 4$, в каждую ячейку которое записано натуральное число (не обязательно все числа разные). После этого под каждым числом записывается натуральное число, равное количеству таких же самых чисел в предыдущем ряду (например, если в верхнем ряду трижды встретилось число 10, то под каждым из этих чисел 10 в следующем ряду будет записано число 3). После этого с новым рядом проводиться аналогичная процедура.
а) Докажите, что после конечного числа шагов ряды не будут меняться.
б) Какое наибольшее число раз возможно, чтобы следующий ряд отличался от предыдущего при $n = 2016$ и при произвольном n?

II тур

1. Вася хочет подобрать действительные числа a, b, c и d так, чтобы уравнение

$$a\cos x + b\sin 2x + c\cos 3x + d\sin 4x = 0$$

не имело действительных корней. Удастся ли Васе это сделать?

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено неравенство $\angle BAD + \angle ABC < 180°$. На стороне AB выбрана точка E так, что F – вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AED и BEC, – лежит внутри четырехугольника $ABCD$. Треугольник CDG построен во внешнюю сторону от четырехугольника $ABCD$ так, что $\angle CDG = \angle ABC$ и $\angle DCG = \angle DAB$. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой.

3. У Даши есть окружность длины $2n$. Окружность разбита на $2n$ равных дуг и их концы покрашены в красный цвет. Даша выбрала $n+1$ дугу с концами в красных точках, одна из которых имеет длину 1, вторая – длину 2,…, $(n+1)$-я – длину $n+1$. Докажите, что среди выбранных дуг найдутся две, одна из которых лежит внутри другой.

4. Дана последовательность a_n такая, что $a_1 = 5$ и $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ для всех $n \geqslant 1$. Число p – простое, причем $p-3$ делится на 4, а $a_{2016}+1$ делится на p. Докажите, что $p = 3$.