Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2014 г.

I тур

1. Найдите все решения уравнения $2^{\sin x} = \sin 2^x$ на промежутке $[0; \pi)$.

2. а) Известно, что в бесконечной арифметической прогрессии натуральных чисел есть некоторый член, который является k-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что среди членов прогрессии есть бесконечное число таких, которые также являются k-ми степенями натуральных чисел.

б) Существует ли бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия натуральных чисел, ни один член которой не является степенью натурального числа, большей первой?

3. Пусть a, b, c – стороны остроугольного треугольника. Докажите, что

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2} \leqslant \sqrt{3\,(ab+bc+ca)}.$$

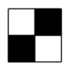
4. В треугольнике ABC, в котором $AC < AB < BC$, на сторонах AB и BC выбрали точки K и N соответственно так, что $KA = AC = CN$. Прямые AN и CK пересекаются в точке O. Из точки O провели отрезок $OM \perp AC$ ($M \in AC$). Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABM и CBM, касаются друг друга.

5. Дан выпуклый 11-угольник. Его диагонали покрашены в несколько цветов. Два цвета называются пересекающимися, если существуют два отрезка, покрашенные в эти цвета и пересекающиеся в некоторой внутренней точке этих отрезков. Какое наибольшее количество разных цветов может быть использовано, чтобы каждые два использованных цвета пересекались?

II тур

1. Известно, что для действительных x, y, z выполнены равенства $x^2+y=y^2+z=z^2+x$. Докажите, что $x^3+y^3+z^3=xy^2+yz^2+zx^2$.

2. Тимур должен покрыть квадратный клетчатый стол $n \times n$ салфетками 2×2, изображенными на рисунке. Салфеток у него неограниченное число. Каждая салфетка может покрывать ровно четыре клетки стола. Все клетки стола должны быть покрыты, салфетки могут накладываться друг на друга, но не могут выходить за границу стола. Салфетки можно поворачивать. Какое наименьшее число чёрных клеток может остаться видимым?



3. Пусть ω – описанная окружность треугольника ABC. Другая окружность, проходящая через точки A и C, пересекает отрезки BC и BA в точках D и E соответственно. Прямые AD и CE повторно пересекают ω в точках G и H соответственно. Касательные к окружности ω, проведенные в точках A и C, пересекают прямую DE в точках L и M соответственно. Докажите, что прямые LH и MG пересекаются в точке, принадлежащей ω.

4. Сережа хочет покрасить все целые числа в несколько цветов так, чтобы числа, разность которых является точной степенью, были покрашены в разные цвета. Хватит ли ему конечного числа цветов? (Точной степенью называется число вида n^k, где n и k – натуральные числа, причём $k \geqslant 2$.)