

Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2013 г.

I тур

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют равенству $\sin x + \cos y = \sin y + \cos x$.

2. Для $x \in (0; 1)$ и $y \in (0; 1)$ найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}.$$

3. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB , AC и BC в точках D , E и F соответственно. Прямая, которая проходит через точку F и центр этой окружности, пересекает отрезок DE в точке L . Докажите, что прямая AL проходит через середину стороны BC .

4. Найдите все такие определенные на множестве всех действительных чисел числовые функции f , что для любых $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(xf(y)) + f(y + f(x)) - f(x + yf(x)) = x.$$

5. По кругу записали 672 натуральных числа a_1, a_2, \dots, a_{672} таких, что $a_1 + a_2 + \dots + a_{672} = 2013$ и $a_k \neq 1342$ для всех $k, 1 \leq k \leq 672$. Докажите, что всегда можно выбрать несколько записанных подряд чисел, сумма которых равна 1342.

II тур

1. Известно, что $a + b + c + d = 6$. Может ли выполняться равенство

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 18?$$

2. В клетках таблицы 11×11 расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Настя посчитала произведение всех чисел в каждой строке, а Влад – произведение всех чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

3. Точка O – центр описанной окружности тупоугольного треугольника ABC с тупым углом при вершине B . Пусть D – точка пересечения прямой AB и прямой, перпендикулярной AC и проходящей через точку C . Прямая l проходит через точку D перпендикулярно AO , E – точка пересечения прямых l и AC , F – точка пересечения прямой l с описанной окружностью треугольника ABC , причём F лежит на отрезке DE . Докажите, что описанные окружности треугольников BEF и DFC касаются.

4. Таня записала на доске числа 0 и 1. Раз в минуту она выписывает на доску наименьшее натуральное число, которое не составляет ни с какими двумя уже написанными арифметическую прогрессию и не было выписано ранее. Будет ли написано на доске число 2013?