

## Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2014 г.

### I тур

1. Найдите натуральное число  $n$ , для которого существует наибольшее количество пар ненулевых цифр  $a$  и  $b$ , удовлетворяющих условию  $\overline{ab} - \overline{ba} = n$ .
2. Две окружности  $\omega_1, \omega_2$  проходят через центр  $O$  окружности  $\omega$  и касаются ее внутренним образом в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Докажите, что на прямой  $AB$  лежит общая точка окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .
3. а) Можно ли расставить в клетках таблицы  $3 \times 5$  числа  $1, 2, \dots, 15$  так, чтобы суммы чисел во всех строчках были одинаковыми, суммы чисел во всех столбиках были одинаковыми (но, возможно, отличались от сумм чисел в строчках)?  
б) Можно ли расставить в клетках таблицы  $4 \times 5$  числа  $1, 2, \dots, 20$  так, чтобы суммы чисел во всех строчках были одинаковыми, суммы чисел во всех столбиках были одинаковыми (но, возможно, отличались от сумм чисел в строчках)?
4. Решите в натуральных числах следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2, \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$$

5. Пусть  $a, b, c$  – стороны остроугольного треугольника. Докажите, что

$$\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} + \sqrt{c^2 + a^2 - b^2} \leq \sqrt{3(ab + bc + ca)}.$$

### II тур

1. Таня составила из натуральных чисел от 1 до 22 одиннадцать дробей (каждое число использовано ровно один раз и стоит либо в числителе, либо в знаменателе какой-то дроби). Какое наибольшее количество целых чисел могло получиться у Тани?
2. Существуют ли натуральные числа  $a, b, c$  такие, что каждое из трех чисел  $a^2 + b + c, a + b^2 + c, a + b + c^2$  является точным квадратом?
3. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AC = BC$ ) на стороне  $BC$  выбрана точка  $D$  так, что  $BD = 2CD$ . На отрезке  $AD$  выбрана точка  $P$  так, что  $\angle BPD = \angle BAC$ . Докажите, что  $\angle CPB = 90^\circ$ .
4. В группе из 2013 людей любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что в этой группе найдется человек, знакомый со всеми остальными.