Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2013 г.

I тур

1. Известно, что $a \neq b$ и уравнение $ax^{2013} + x^{2012} + b = 0$ и $bx^{2013} + x^{2012} + a = 0$ имеют общий действительный корень. Найдите $a + b$.

2. Найдите все такие пары простых чисел p и q, для которых имеет место равенство
$$p^5 - (4p - q)^2 = 2q^2.$$

3. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c выполняется неравенство
$$3a^2 + b^2 + c^2 + bc \geqslant 3a\,(b + c)\,.$$

4. Пусть H – точка пересечения высот AQ, BL и CP остроугольного треугольника ABC, K – общая точка отрезков PQ и BH, M – середина стороны AC, N – середина отрезка BH. Луч BL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D, отличной от B. Известно, что $KQ = HQ$. Докажите, что прямые MN и AD перпендикулярны.

5. Руководитель математического кружка нарисовал на доске таблицу размером 30×30 и предложил ученикам заполнить ее числами $1,\ 2,\ \ldots,\ 900$, записывая ежесекундно в какую-то пустую клетку по своему усмотрению одно из тех чисел, что не использовались ранее. Смогут ли ученики выполнить задание так, чтобы в любой момент ни в одной строке, ни в одном столбце сумма всех записанных чисел не давала остаток 1 от деления на 3?

II тур

1. Найдите все действительные числа x, y такие, что
$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}.$$

2. Дан треугольник ABC, в котором $AB + BC = 2AC$. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов AMN и CNM лежит на прямой AC.

3. Найдите количество натуральных чисел a, для которых найдется набор целых неотрицательных чисел $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{2013}$ таких, что
$$a^{x_0} = a^{x_1} + \ldots + a^{x_{2013}}.$$

4. На соревнованиях 8 судей выставляют оценки “да” или “нет” участникам. Оказалось, что для любых двух участников какие-то два судьи поставили обоим “да”, какие-то два судьи поставили обоим “нет”, какие-то два судьи поставили первому “да”, а второму “нет”, и, наконец, какие-то два судьи поставили первому “нет”, а второму “да”. Какое наибольшее количество участников могло быть?