Областная олимпиада юных математиков, 8 класс, 2013 г.

I тур

1. Чебурашка и Крокодил Гена съели торт. Чебурашка ел в два раза медленнее Крокодила Гены, но начал есть на минуту раньше. Выяснилось, что они съели поровну. За какое время Чебурашка сам съел бы этот торт?

2. Известно, что трехзначное число $\overline{mnk}$ на 1 больше трехзначного числа $\overline{abc}$. Докажите, что число $\overline{abcmnk}$ не может делиться без остатка на 13.

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, 4027, 4028. Коля и Андрей по очереди зачеркивают числа, причем Коля ходит первым. За один ход можно зачеркнуть только одно из ранее незачеркнутых чисел. Андрей хочет, чтобы после его 2013-го хода на доске остались два последовательных числа (т. е. числа, разность которых равняется 1). Всегда ли он сможет этого достигнуть?

4. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых число $p^3 + q^2$ является кубом некоторого натурального числа.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Известно, что на отрезке CB_1 существует такая точка M, что $CM = CA_1$. Через точку M проведена прямая, которая параллельна BB_1 и пересекает прямую AB в точке N. Докажите, что $A_1N = A_1M$.

II тур

1. Чтобы испечь сто блинов, маме требуется 30 минут, а Тане – 40 минут. Алеша готов съесть 100 блинов за час. Мама с Таней пекут блины без остановки, а Алеша непрерывно их поедает. Через какое время после начала этого процесса на столе окажется ровно сто блинов?

2. Найдите все простые числа p, для которых существуют натуральные числа x и y такие, что

$$x\left(y^2 - p\right) + y\left(x^2 - p\right) = 5p.$$

3. Окружности s_1 и s_2 с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, пересекает второй раз окружности s_1 и s_2 в точках C_1 и C_2 соответственно, причём точка A лежит на отрезке C_1C_2. Пусть D – точка пересечения прямых C_1O_1 и C_2O_2. Докажите, что точки C_1, C_2, B и D лежат на одной окружности.

4. В математическом кружке занимается 21 ученик, некоторые из учеников дружат между собой. Известно, что ребята, имеющие одинаковое число друзей, не дружат между собой, а имеющие разное число друзей – дружат. Докажите, что из кружка нельзя выбрать две непересекающиеся команды по 6 человек так, чтобы в одной все школьники дружили между собой, а в другой все школьники не дружили между собой.