Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

11 клас

11–1. Задано додатні дійсні числа a, b, c. Яке найбільше значення може приймати вираз $|ax+by-cz|+|ax-by+cz|+|-ax+by+cz|$, якщо $x, y, z \in [0;1]$.

11–2. В країні є n міст, причому між кожними двома з них є пряме транспортне сполучення. Вартості переїзду між парами міст складають 1, 2, 3, $\ldots$, $\frac{1}{2}n(n-1)$, тобто є попарно різними для кожної пари міст. Маршрутом називається такий шлях, що починається в деякому місті, проходить рівно по одному разу через кожне інше місто країни та повертається в початкове місто. Олеся здійснює свій маршрут за таким правилом: з кожного міста вона вирушає у те місто, у якому ще не бувала раніше (якщо таких вже немає, то вона повертається у своє початкове місто), але вибирає з них таке, вартість проїзду до якого найменша. Андрій навпаки – з кожного міста вирушає у те місто, вартість проїзду до якого найбільша з можливих. Чи могло так статися, що їх маршрути коштували однаково? Починати свої маршрути вони можуть як з одного, так і з різних міст.

11–3. Нехай d – натуральний дільник натурального числа m, (a_i) та (b_i) -- дві арифметичні прогресії з натуральними членами. Відомо, що існують такі індекси i та j, для яких $(a_i, b_j)=1$, а також такі індекси k та l, для яких $(a_k, b_l)=m$. Доведіть, що можна підібрати такі індекси t та s, для яких $(a_t, b_s)=d$.
Тут через (x, y) позначений найбільший спільний дільник чисел x, y.

11–4. Жив якось на площині Трикутник Боб, у якого ортоцентр належав вписаному колу. Одного дня розбишака Богдан похазяйнував на тій площині. Після цього на ній лишились намальованими лише вписане коло Трикутника Боба, пряма, що містить одну із його сторін, та його ортоцентр. Допитливий Максим хоче за цими даними відновити Трикутник циркулем та лінійкою. Допоможіть йому це зробити.
Дослідження можливості побудови робити не потрібно.

Чернігів, 21 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

11 клас

11–5. Для яких натуральних n число $n^{2017}+n^2+1$ є простим?

11–6. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло w з центром у точці O. Його діагоналі перетинаються в точці H. Позначимо центри описаних кіл трикутників AHD і BHC як O_1 і O_2 відповідно. Пряма, що проходить через точку H, перетинає w в точках M_1 і M_2. Ця пряма перетинає вдруге описане коло ΔO_1HO у точці N_1, а описане коло ΔO_2HO у точці N_2. Відомо, що точки N_1 і N_2 лежать всередині кола w. Доведіть, що $M_1N_1 = M_2N_2$.

11–7. Чи існують дві функції $f, g: R \to R$ такі, що для всіх $x, y \in \mathrm{R}$ справджується рівність:

$$f(x+f(y)) = \{y\} + g(x)?$$

Тут через $\{y\}$ позначена дробова частина числа y, яка визначається як $\{y\} = y - [y]$, де $[y]$ – ціла частина числа y, тобто найбільше ціле число, що не перевищує y.

11–8. Для яких натуральних N існує деякий квадрат $k \times k$ та прямокутник $a \times b$ (числа $a > b > 0$ – раціональні) такі, що цей квадрат можна розрізати на N прямокутників $a \times b$, таким чином, щоб принаймні два з цих прямокутників були по різному орієнтовані (тобто їх не можна було б сумістити паралельним переносом).

Чернігів, 22 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів