Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

8 клас

8–1. Бізнесмен має декілька синів та наймолодшу дочку. Він вирішив на Новий рік подарувати їм разом 1000000 доларів. Розподілив він цю суму таким чином: спочатку старшому синові він виписав чек на деяку ненульову суму a_1, а потім ще на $\frac{1}{11}$ суми, що лишилася (тобто від $1000000 - a_1$). Далі, другому синові він виписав чек на деяку суму a_2, а потім ще на $\frac{1}{10}$ суми, що лишилася, третьому – відповідно на суму a_3, а потім ще на $\frac{1}{9}$ суми, що лишилася, і так далі. Решту суми він віддав дочці. Виявилось, що усі діти отримали у подарунок однакову суму грошей. Яку найбільшу кількість синів може мати бізнесмен, та яку початкову суму a_1 у цьому випадку міг отримати старший син?

8–2. На дошці намальовано n комірок, що перенумеровані зліва направо числами $1, 2, ..., n$. У кожній комірці записано знак «$+$». Андрійко має зробити n ходів. Першим ходом він міняє знак на протилежний у одній довільній комірці на свій вибір. Другим ходом -- у двох довільних сусідніх комірках, далі -- у трьох сусідніх, і так далі. Передостаннім ходом він міняє знак у $(n-1)$-ній комірці, що стоять поспіль, і останнім ходом змінює знак в усіх n комірках. Чи зможе Андрійко наприкінці отримати в усіх комірках знак « – », якщо

а) $n = 2017$; ***б)*** $n = 2018$?

8–3. Знайдіть усі пари натуральних чисел a, b, для яких справджується рівність:

$$[a, b + 2017] = [b, a + 2017].$$

Тут через $[x, y]$ *позначене найменше спільне кратне чисел* x, y.

8–4. Всередині прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AB взято точку K таку, що $\angle AKC = 90°$ та $\angle CKB = 2\angle CAB$. На відрізку KB знайшлась така точка T, що $\angle KTC = \angle CAK$. Пряма AK перетинає відрізок BC у точці P. Доведіть, що $\angle TPA = \angle ABC$.

Чернігів, 21 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

8 клас

8–5. Яку найбільшу кількість цифр може мати число, що задовольняє такі умови: воно є n-м степенем натурального числа (n-- повинно бути натуральним числом, більшим за 1) і для деякого натурального k його цифри зліва направо від першої до k-ї строго зростають, а з k-ї до останньої – строго спадають.

8–6. Дано гострокутний трикутник ABC. Нехай D – точка, що симетрична точці A відносно прямої BC. Прямі DB та DC вдруге перетинають описане коло w трикутника ABC в точках X і Y відповідно. Припустимо, що точки X та Y лежать всередині відрізків DB та DC відповідно. Доведіть, що центр описаного кола трикутника XYD лежить на колі w.

8–7. Задано натуральне число $n \geq 3$. Олеся грає у наступну гру: на початку гри фішка розташована на декартовій площині XOY у початку координат. Олеся пересуває фішку за такими правилами: фішку можна рухати по площині тільки паралельно координатним осям. На першому кроці фішка повинна переміститися на відстань 1, на другому кроці – на відстань 2, на третьому – на відстань 3, і так далі (пересування фішки на кожному новому кроці є на 1 довшим, у порівнянні з попереднім кроком). Усього Олеся робить n кроків. Її програш у цій грі дорівнює максимальній відстані від фішки до початку координат протягом усієї гри (не обов'язково після n-го кроку). Якого найменшого програшу може домогтися Олеся?

8–8. Для додатних чисел x, y, z справджується рівність:
$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$
Які значення може приймати сума $xy+yz+zx$?

Чернігів, 22 березня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів