LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков 2016

<u>Первый день</u>

10 класс

1. Докажите, что для всех натуральных $n \geq 2$ указанное число является составным:

$$\frac{n^{1003}+n^{1002}+n^{1001}+1}{n+1}.$$

2. Биссектриса угла $\angle ABC$ треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника в точке K. Точка N лежит на отрезке AB, причем $NK \perp AB$. Через точку P – середину отрезка NB – проведена прямая, параллельная прямой BC, пересекающая прямую BK в точке T. Докажите, что прямая NT делит отрезок AC пополам.

3. На доске записано число 2016. Олеся и Андрей играют в такую игру: они по очереди (начинает Олеся) уменьшают число на доске на натуральное число, которое не превышает номера хода (первым ходом Олеся должна обязательно уменьшить число на 1, Андрей своим ходом на 1 или на 2, далее Олеся на 1, 2 или 3 и т.д.) Выигрывает тот, кто первым сможет записать на доске число 0. Кто побеждает при правильной игре обоих соперников?

4. Существует ли функция $f: R \to R$ такая, что для любых действительных чисел x, y выполняется неравенство:

$$f(x-f(y)) \leq x - yf(x)?$$

Запорожье, 22 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков
2016

Второй день

10 класс

5. Решите уравнение $x[x]=2016$.
Тут через $[x]$ *обозначена целая часть числа* x*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее* x.

6. До 1995 года в чемпионатах Украины по футболу во всех лигах за победу в матче команда получала 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение очки не начислялись. С 1995 года стали давать за победу 3 очка, за ничью и поражение как и ранее давали 1 и 0 очков соответственно. Федерация футбола решила пересчитать все чемпионаты, которые проводились во всех лигах за все годы по новой системе начисления очков, рассчитывая, что принципиально распределение мест не изменится. Но оказалось, что в чемпионате 1927 года в одной из региональных лиг n команд провели первенство в один круг, т.е. каждая команда сыграла с каждой один раз. При этом команда «А» набрала наибольшее количество очков, а команда «Б» набрала наименьшее количество очков. Но после пересчета очков по новым правилам наибольшее количество очков набрала команда «Б», а наименьшее количество очков – команда «А». При каком наименьшем n такое могло произойти?
Утверждение, что команда набрала наименьшее или наибольшее количество очков, означает, что точно такое же количество очков больше не набрала ни одна другая команда.

7. Назовем *степенью числа* $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ число $\deg(n)=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k$, где p_i – попарно различные простые числа, а $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ — натуральные. Докажите, что существуют 2016 последовательных натуральных чисел среди которых есть ровно 1000 со степенью меньше 11.

8. На плоскости расположены треугольник APQ и прямоугольник $ABCD$ так, что середина отрезка PQ лежит на диагонали BD прямоугольника, а один из лучей AB или AD является биссектрисой угла PAQ. Докажите, что один из лучей CB или CD является биссектрисой угла PCQ.

Запорожье, 23 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов