LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков 2016

<u>*Первый день*</u>

9 класс

1. Можно ли представить число 2016 в виде суммы кубов:

а) трех натуральных чисел;

б) четырех натуральных чисел?

2. Биссектриса угла $\angle ABC$ треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника в точке K. Точка N лежит на отрезке AB, причем $NK \perp AB$. Через точку P – середину отрезка NB – проведена прямая, параллельная прямой BC, пересекающая прямую BK в точке T. Докажите, что прямая NT делит отрезок AC пополам.

3. Для положительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих условию:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + ... + x_n^{n-1} = x_1 x_2 ... x_n,$$

докажите неравенство:

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1)...(x_n - n + 1) \geq 1.$$

4. Для некоторого нечетного n квадрат $n \times n$ разбит на n^2 клеток и в некоторой его клетке лежит n^2 фишек. За один шаг разрешается из клетки, в которой находится не меньше двух фишек, передвинуть две фишки в клетки, симметричные относительно данной и имеющие с ней по крайней мере одну общую точку. Таких типов ходов четыре – тип (1): фишки передвигаются параллельно вертикали, тип (2): параллельно горизонтали, тип (3): параллельно диагонали квадрата, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, тип (4): параллельно другой диагонали квадрата. Через несколько шагов оказалось, что в каждой клетке квадрата находится ровно по одной фишке. Докажите, что ходов типа (3) было сделано столько же, сколько и ходов типа (4).

Запорожье, 22 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков
2016

<u>*Второй день*</u>

9 класс

5. Известно, что числа a, b, c удовлетворяют условиям:

$$\frac{a+c}{a+1}=b,\ \frac{c+b}{c+1}=a,\ \frac{b+a}{b+1}=c.$$

Какие значения может принимать выражение $(a+1)(b+1)(c+1)$?

6. В ряд выписаны числа 1, 2, …, n. При этом числа 1 и n покрашены в синий цвет, а все остальные – в желтый. Два игрока – Олеся и Андрей – по очереди красят одно из желтых чисел в синий цвет по таким правилам: первым ходом Олеся (она начинает) красит в синий цвет любое из желтых чисел (обозначим его через k). Тогда Андрей выбирает тот из промежутков чисел (1, 2, …, k) или (k, $k+1$, …, n), который содержит больше желтых чисел. Если эти промежутки одинаковые по количеству желтых чисел, то выбирается любой из них. Если, например, большим является промежуток (1, 2, …, k), то другой промежуток в дальнейшей игре участия не берет. После этого Андрей красит в синий цвет любое из желтых чисел нового промежутка. Теперь новый промежуток также разделился на два меньших. Далее Олеся для своего хода выбирает тот из двух новых промежутков, который содержит больше желтых чисел, а другой промежуток вне игры. И так далее. Побеждает в игре тот из игроков, кому удастся покрасить в синий цвет такое число, у которого соседние слева и справа числа уже синие. Кто побеждает в этой игре при правильной игре обоих соперников?

7. Задан треугольник ABC, в котором $AB>AC$. Через точку A провели касательную к описанной окружности ΔABC. Эта касательная пересекает прямую BC в точке P. На продолжении стороны BA за точку A отметили точку Q так, что $AQ=AC$. Пусть X и Y – середины отрезков CQ и AP соответственно, а R –лежит на отрезке AP, причем $AR=CP$. Докажите, что $CR=2XY$.

8. Для каких натуральных n существуют $2n$ попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$, удовлетворяющих равенствам:

$$a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n \text{ и } a_1a_2...a_n=b_1b_2...b_n?$$

Запорожье, 23 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов