LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков 2016

Первый день

8 класс

1. Олеся выбрала пять чисел из множества $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Она сообщила их произведение Павлику и попросила его определить четность суммы выбранных ею чисел. Павлик ответил, что он не может этого сделать однозначно. Каким могло быть произведение выбранных Олесей чисел?

2. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle ACB = 60°$ проведены биссектриса BL и высота BH. Из точки L на сторону BC опущен перпендикуляр LD. Найдите углы ΔABC, если оказалось, что $AB \| HD$.

3. При каких натуральных n число N также является натуральным, если $N =$

$$= \frac{2\cdot 1}{\sqrt{1^2+1+4}+\sqrt{1^2-1+4}} + \frac{2\cdot 2}{\sqrt{2^2+2+4}+\sqrt{2^2-2+4}} + \ldots + \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+4}+\sqrt{n^2-n+4}} \ ?$$

4. В квадрате $n \times n$, разбитом на n^2 клеток, в некоторой клетке лежит n^2 фишек. За один шаг разрешается из клетки, в которой находится не меньше двух фишек, передвинуть по одной фишке в две клетки, симметричные относительно данной и имеющие с ней по крайней мере одну общую точку. Возможно ли, чтобы через несколько шагов в каждой клетке квадрата находилось ровно по одной фишке, если:

а) $n = 2016$; ***б)*** $n = 2017$?

Запорожье, 22 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков 2016

<u>Второй день</u>

8 класс

5. Известно, что числа a, b, c удовлетворяют условиям:

$$a^2+2=b^4,\ b^2+2=c^4,\ c^2+2=a^4.$$

Какие значения может принимать выражение $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)$?

6. ***а)*** Выпуклый семиугольник хотят разбить на треугольники, проводя его диагонали. Докажите, что при этом можно получить 5 или 7 треугольников, но нельзя получить 6 треугольников.
б) Докажите, что существует невыпуклый семиугольник, который можно разбить внутренними диагоналями на 6 треугольников. Внутренней диагональю многоугольника M называется отрезок, соединяющий две не соседние вершины M и не выходящий за границу фигуры M.

7. Для каждой пары натуральных чисел a, b определено целое неотрицательное число $a*b$, которое удовлетворяет таким двум условиям:

1) $(a+b)*b=a*b+1$;
2) $(a*b)\cdot(b*a)=0$.

Найдите значения выражений $2016*121$ и $2016*144$.

8. Задан треугольник ABC, в котором $\angle ABC=\angle ACB=30°$. На стороне BC выбрана точка D. Точка K такова, что D является серединой AK. Оказалось, что $\angle BKA>60°$. Докажите, что $3AD<CB$.

Запорожье, 23 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов