

# LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

## Первый день

### 9 класс

1. Цена одного килограмма шоколадных конфет –  $x$  гривен, а килограмма картошки –  $y$  гривен, причем числа  $x$  и  $y$  – натуральные и не более чем двузначные. Мама сказала Андрюше купить 200 граммов конфет и 1 кг картошки, что должно было стоить ровно  $N$  гривен. Андрюша все перепутал и купил 200 граммов картошки и 1 кг конфет. Ему пришлось заплатить ровно  $M > N$  гривен. Оказалось, что двузначные числа  $N$  и  $M$  записываются одними и теми же цифрами, но в разном порядке. Сколько стоит килограмм картошки и килограмм шоколадных конфет?

2. В теннисном турнире в один круг участвовали 8 девочек (т.е. каждая теннисистка сыграла с каждой из остальных ровно 1 раз, ничьих в теннисе не бывает). Оксана заняла второе место по набранным очкам, и такое количество очков не набрала больше ни одна другая участница. Какое максимальное число игр могла проиграть Олеся, которая победила в этом турнире?

3. Для положительных чисел  $a, b, c$ , удовлетворяющих условию  $a + b + c + 2 = abc$ , докажите неравенство:  $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1} \geq 2$ .

4. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрана произвольная точка  $D$ . Пусть  $O$  – центр описанной окружности  $\triangle ABC$ , а  $Z$  – точка этой окружности, диаметрально противоположная точке  $A$ . Пусть  $X, Y$  такие точки на отрезках  $BO, CO$  соответственно, для которых выполняется условие:

$$\angle BXD + \angle ABC = 180^\circ = \angle CYD + \angle ACB.$$

Докажите, что градусная мера  $\angle XZY$  не зависит от выбора точки  $D$ .

Черновцы, 23 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа  
Каждая задача оценивается в 7 баллов

# LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

## Второй день

### 9 класс

5. Известно, что для чисел  $a, b, c$  выполняется условие: среднее арифметическое чисел  $a, b$  равно числу  $c$ , т.е.  $c = \frac{1}{2}(a + b)$ , а среднее геометрическое чисел  $a, c$  равно числу  $b$ , т.е.  $b = \sqrt{ac}$ . Обязательно ли числа  $a, b, c$  равны между собой?

6. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $BC$  и  $AB$  выбраны точки  $A_1$  и  $C_1$  соответственно такие, что  $AA_1 = CC_1$ . Отрезки  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $F$ . Оказалось, что  $\angle CFA_1 = 2\angle ABC$ . Докажите, что  $AA_1 = AC$ .

7. Найдите все простые числа  $p < q < r$  такие, что числа  $A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1$  и  $B = 3p + 5q$  равны одному и тому же простому числу.

8. Есть  $2k + 1$  человек, все попарно различного роста. Обозначим их рост в порядке возрастания – от самого низкого до самого высокого таким образом:  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2k+1}$ . После этого построим их произвольным образом в виде таблицы  $M \times N$  ( $M$  – строк и  $N$  столбцов). Теперь в каждой из  $M$  строк выбираем среднего по росту. А далее из этих средних по росту  $M$  людей выбираем среднего по росту, которого назовем *середняк*.

а) Какой наименьший рост может иметь середняк, если  $2k + 1 = 2015$  ?

б) Какой наименьший рост может иметь середняк для произвольного  $k$  ?

Черновцы, 24 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа  
Каждая задача оценивается в 7 баллов