LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

Первый день

8 класс

1. Найдите все целые числа n, удовлетворяющие равенству:

$$(n-2013)(n-2014)(n-2016)(n-2017)=4.$$

2. У Насти есть 5 желтых монет, про которые ей известно, что они настоящие. У нее есть также 5 синих монет, про которые ей известно, что среди них 3 настоящие и две фальшивые. Все 8 настоящих монет весят одинаково, одна из фальшивых монет тяжелее настоящей на 1 грамм, а другая – легче настоящей также на 1 грамм. Сможет ли Настя с помощью чашечных весов без гирь за 3 взвешивания найти обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжелая, а какая более легкая?

3. Решите уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{2014}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2015}-\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2016}-\sqrt{x+2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2015-x}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2016-x}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2017-x}-\sqrt{3}}.$$

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. На диагоналях AC и BD отмечены точки P и Q соответственно таким образом, что AC - биссектриса $\angle BPD$, а BD - биссектриса $\angle AQC$. Докажите, что $\angle BPD=\angle AQC$.

Черновцы, 23 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2015

<u>*Второй день*</u>

8 класс

5. Известно, что для чисел a, b, c выполняется условие: среднее арифметическое чисел a, b равно числу c, т.е. $c = \frac{1}{2}(a+b)$, а среднее гармоническое чисел a, c равно числу b, т.е. $b = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$. Обязательно ли числа a, b, c равны между собой?

6. В трапеции $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями точки P, N, Q, M – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. На основании CD существует точка L, отличная от точки Q, для которой угол MLN – прямой. Найдите величину угла LPA.

7. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r), удовлетворяющие равенству

$$\frac{q}{p-1} + \frac{r}{p+1} = \frac{q+r+1}{p}.$$

8. На окружности расположены N точек. Андрей и Олеся играют в такую игру. Первым ходит Андрей. Они по очереди соединяют две из заданных точек хордой, если она не пересекает ни одну из ранее проведенных хорд во внутренней точке. Побеждает тот, после чьего хода образуется треугольник из проведенных хорд. Кто побеждает при правильной игре обоих игроков, если

а) $N = 14$; ***б)*** $N = 15$?

Черновцы, 24 марта 2015 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов