LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2014

Первый день

11 класс

1. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство
$$\sqrt{x-a}+\sqrt{a-x^2} \le \sqrt{2x-2x^2}$$
имеет единственное решение в действительных числах.

2. Окружность γ описана вокруг остроугольного треугольника ABC, AD и AL – его высота и биссектриса соответственно. Обозначим через W, T, A' вторые точки пересечения с окружностью γ прямых AL, WD, TL соответственно. Докажите, что AA' – диаметр окружности γ.

3. Для каких натуральных $n \ge 3$ существует набор прямоугольников $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, обладающих таким свойством: любой из этих прямоугольников можно покрыть всеми остальными $n-1$-м прямоугольниками из этого набора, но нельзя покрыть никакими $n-2$-мя другими прямоугольниками из этого набора? (Прямоугольники можно размещать в любом из двух положений, при которых их стороны параллельны двум заданным перпендикулярным прямым).

4. Для любого ли конечного подмножества A натуральных чисел существует простое число p такое, что для каждого числа a, принадлежащего множеству A, найдется натуральное число x такое, что $x^2-a \vdots p$, но x не делится нацело на p?

Киев, 25 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2014

<u>Второй день</u>

11 класс

5. На горизонтальной прямой n слева направо расположены точки $A_1, A_2, ..., A_9$. Расстояние между каждыми двумя соседними точками равно 1. Построим прямую l, перпендикулярную n и проходящую через точку A_5. Существует ли на этой прямой l хотя бы одна такая точка $B \neq A_5$, что среди всех треугольников BA_iA_j, $1 \le i < j \le 9$, количество остроугольных и тупоугольных одинаковое?

6. Для каких натуральных чисел N существуют такие натуральные числа x, y, что их сумма равна N, а произведение делится на N?

7. Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается его сторон BA и AC в точках K и L соответственно. Высота AH пересекает биссектрисы углов B и C в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников KPB и LQC обозначим через w_1 и w_2. Докажите, что если середина высоты AH лежит вне окружностей w_1 и w_2, то касательные к окружностям w_1 и w_2, проведенные из этой середины, равны.

8. Пусть A – конечное множество функций, которые определены на множестве действительных чисел и принимают действительные значения таких, что для любых функций f, g, которые принадлежат A, функция $f(g(x))$ тоже принадлежит A. Известно, что для любой функции f f из множества A существует функция g из A такая, что

$$f(f(x)+y)=2x+g(g(y)-x).$$

Докажите, что функция $h(x)=x$ принадлежит A.

Киев, 26 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов