

# LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2014

## Первый день

### 10 класс

1. Для какого наибольшего натурального  $n$  существует набор из  $n$  натуральных чисел, который обладает таким свойством: среди чисел набора ровно одно число делится на  $n$ , ровно два числа делятся на  $n-1$ , и так далее, ровно  $n-1$  число из этого набора делится на 2 и все  $n$  чисел делятся на 1?
2. Окружность  $\gamma$  описана вокруг остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $AD$  и  $AL$  – его высота и биссектриса соответственно. Обозначим через  $W$ ,  $T$ ,  $A'$  вторые точки пересечения с окружностью  $\gamma$  прямых  $AL$ ,  $WD$ ,  $TL$  соответственно. Докажите, что  $AA'$  – диаметр окружности  $\gamma$ .
3. Существует ли геометрическая прогрессия натуральных чисел  $b_0, b_1, \dots, b_{2014}$  со знаменателем, отличным от 10, удовлетворяющая такому условию: число  $b_{i+1}$  имеет в своей десятичной записи ровно на одну цифру больше, чем число  $b_i$  для всех  $i$  от 0 до 2013?
4. Пусть есть связный граф с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Обозначим  $d_{i,j}$  – наименьшее число ребер, которые необходимо пройти, чтобы попасть из вершины  $A_i$  в вершину  $A_j$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы:  $D = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{i,j}$ .

Киев, 25 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа  
Каждая задача оценивается в 7 баллов

# LIV Всеукраинская олимпиада юных математиков 2014

Второй день

10 класс

5. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, не имеющих нулевых цифр в своей записи и удовлетворяющих условию: при любой перестановке цифр этого числа оно остается не делящимся на 4?

6. Найдите наименьшее действительное значение параметра  $C$ , при котором неравенство

$$\cos a + \cos b + 3 \cos a \cos b \leq 2 \cos^2 a + \cos^2 b + C$$

выполняется при всех  $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2}$ .

7. Назовем натуральное число *солидарным*, если оно взаимно просто с суммой всех своих натуральных делителей.

а) Какое наибольшее число солидарных чисел может идти подряд?

б) Какое наибольшее число солидарных чисел может идти подряд, если число 1 солидарным не считать?

8. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  в точках  $N$ ,  $K$ ,  $P$  соответственно. Известно, что  $AB > BC$  и биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекают прямую  $NK$  в точках  $Q$  и  $T$  соответственно. Обозначим через  $S$  – точку пересечения прямых  $AQ$  и  $TP$ , а через  $F$  – точку пересечения прямых  $CT$  и  $PQ$ . Докажите, что прямые  $NK$ ,  $SF$  и  $AC$  пересекаются в одной точке.

Киев, 26 марта 2014 г.

На выполнение задания дается 4 часа  
Каждая задача оценивается в 7 баллов