LI Всеукраїнська олімпіада, 2011
11 клас. I тур

1. Розв'язати рівняння:

$$\cos \pi x = \left[\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2} \right] - \frac{1}{2} \right].$$

Тут через $[a]$ позначено цілу частину числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.

2. Правильний трикутник зі стороною 7 паралельними прямими поділено на 49 маленьких правильних одиничних трикутничків. Із нього вирізають уздовж ліній сітки паралелограми, одна сторона яких дорівнює 1, а друга дорівнює 2. Яку найбільшу кількість таких паралелограмів можна вирізати?

3. Натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову:

$$0 < |ad - bc| < \min\{c; d\}.$$

Нехай x, y – взаємно прості натуральні числа, більші від 1. Доведіть, що число $x^a + y^b$ не ділиться на число $x^c + y^d$.

4. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC. На бічній стороні CD довільно відмітили точку F. E – точка перетину прямих AF і BD. На бічній стороні AB відмітили точку G так, що $EG \parallel AD$. Позначимо через H точку перетину прямих CG і BD, через I – точку перетину прямих FH і AB. Доведіть, що прямі CI, FG і AD перетинаються в одній точці.

LI Всеукраїнська олімпіада, 2011
11 клас. II тур

5. Коло проходить через вершини A та B трикутника ABC, дотикається сторони BC у точці B і вдруге перетинає сторону AC у точці E. Друге коло проходить через вершини A та C, дотикається сторони BC у точці C і вдруге перетинає сторону AB у точці D. Відрізки BE і CD перетинаються у точці F. Довести, що $\triangle BCF$ – рівнобедрений.

6. Доведіть, що для будь-якого набору чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{2011}, де $a_{2011} \neq 0$, існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої при усіх дійсних x

$$a_1\, f(x) + a_2\, f(f(x)) + \ldots + a_{2011}\, \underbrace{f(f(f \ldots f(x) \ldots))}_{2011} = x.$$

7. Доведіть, що для довільних дійсних a, b, c, менших від 1 і таких, що

$$2\,(a+b+c) + 4abc = 3\,(ab+bc+ca) + 1,$$

виконується нерівність $a + b + c \leqslant \dfrac{3}{4}$.

8. У ящику лежать іграшкові котики. У кожного котика голова пофарбована в один з 2011 кольорів, і хвіст також пофарбований в один з цих 2011 кольорів – можливо, у такий самий, а можливо, в інший. З ящика можна вибрати деяких котиків і скласти з них окремий набір. Набір вважається правильним, якщо він складається рівно з 2011 котиків, серед яких немає двох котиків з головами одного кольору і немає двох котиків з хвостами одного кольору. Відомо, що з ящика можна вибрати правильний набір більше, ніж в один спосіб. Довести, що у ящику можна залишити декількох котиків (можливо, всіх) таким чином, щоб вибрати правильний набір з цього ящика можна було рівно в два способи.