

ЛІ Всеукраїнська олімпіада, 2011

10 клас. І тур

1. Дійсні числа x, y задовольняють умову:

$$x^2 + 3xy + 4y^2 \leq \frac{7}{2}.$$

Доведіть, що $x + y \leq 2$.

2. Правильний трикутник зі стороною 7 паралельними прямими поділено на 49 маленьких правильних одиничних трикутничків. Із нього вирізають уздовж ліній сітки паралелограми, одна сторона яких дорівнює 1, а друга дорівнює 2. Яку найбільшу кількість таких паралелограмів можна вирізати?

3. Для натурального числа $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, поданого у вигляді канонічного розкладу (p_i – прості та попарно різні, α_i – натуральні, $1 \leq i \leq n$), уведемо позначення $T(N) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Для деяких попарно різних натуральних чисел a, b, c, d число $ab + cd$ ділиться націло на число $ac + bd$. Доведіть, що $T(ab + cd) \geq 3$.

4. Через точку F , що розташована поза колом k , провели до цього кола дотичну FA та січну FB , яка перетинає k в точках B і C (C лежить між F і B). Через точку C провели дотичну до кола k , яка перетнула відрізок FA в точці E . Відрізок FX – бісектриса трикутника AFC . Виявилось, що точки E, X та B лежать на одній прямій. Доведіть, що добуток довжин двох сторін трикутника ABC дорівнює квадрату довжини третьої сторони.

ЛІ Всеукраїнська олімпіада, 2011

10 клас. ІІ тур

5. Розв'яжіть у натуральних числах $(x; y)$ рівняння

$$(x + y)^3 = (x - y - 6)^2.$$

6. Два гравці по черзі розставляють знаки “+” або “-” перед послідовними натуральними числами 1, 2, 3, ... і обчислюють суму усіх чисел, перед якими розставлені знаки. Так, перший гравець спочатку ставить знак перед числом 1, і це є його сумою після першого ходу, потім другий ставить знак перед числом 2 і рахує суму двох чисел – це є його сума після його першого ходу, далі перший гравець ставить знак перед числом 3 і рахує суму трьох чисел зі знаками – це його сума після другого ходу, далі другий гравець ставить знак перед числом 4 і рахує суму чотирьох чисел і т. д. Програє той гравець, після ходу якого одержана ним сума вперше за модулем стане більшою або рівною 2011. Хто переможе при правильній грі – перший чи другий гравець?

7. В трикутнику ABC ($AC > BC > AB$) на сторонах BC та AC вибрали точки D і K відповідно так, що $CD = AB$, $AK = BC$. Точки F та L – середини відрізків BD та KC відповідно. Точки R , S – середини сторін AC та AB відповідно. Відрізки SL та FR перетинаються в точці O , при цьому $\angle SOF = 55^\circ$. Знайдіть градусну міру $\angle BAC$.

8. Нехай x, y, z – додатні дійсні числа такі, що $xyz = 1$. Доведіть нерівність:

$$(-x + y + z)(x - y + z) + (x - y + z)(x + y - z) + (x + y - z)(-x + y + z) \leq 3.$$