L Всеукраїнська олімпіада, 2010
8 клас. 1 тур

1. При яких натуральних n значення кожного з виразів $n^2-10n+23$, $n^2-9n+31$ і $n^2-12n+46$ є простим числом?

2. В рядок записали $n \geqslant 5$ дійсних чисел. З'ясувалось, що сума будь-яких трьох записаних поспіль чисел – додатне число, а сума будь-яких 5 записаних поспіль чисел є від'ємним числом. При якому найбільшому значенні n це можливо?

3. Точка P належить трикутнику ABC. Центри описаних кіл трикутників PBC, PAC, PAB позначимо через O_A, O_B, O_C відповідно. Позначимо через O_P – центр описаного кола трикутника $O_AO_BO_C$. Доведіть, що точка P задовольняє умову $O_P = P$ тоді і тільки тоді, коли P – ортоцентр $\triangle ABC$.

4. Розв'яжіть в натуральних числах n, k рівняння: $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

L Всеукраїнська олімпіада, 2010
8 клас. 2 тур

5. У різних вершинах рівностороннього трикутника зі стороною 1 знаходяться три бігуни: Перший, Другий та Третій. Вони одночасно починають рухатись вздовж сторін в одному напрямі (Другий в напрямі Першого, Третій – в напрямі Другого, Перший – в напрямі Третього). Чи обов'язково зустрінуться у якійсь момент в одній точці усі три бігуни одночасно, якщо:

а) швидкості Першого, Другого та Третього відповідно дорівнюють 2008, 2009 та 2010;

б) вони рухаються з різними швидкостями, кожна з яких є натуральним числом?

6. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що будь-яке з чисел $1, 2, \ldots, 10$ може буде подане як цифра або як сума кількох цифр десяткового запису числа n, що стоять поруч.

7. Нехай a і b – такі натуральні числа, що

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] = a^2 + b^2,$$

де через (a, b) та $[a, b]$ позначені відповідно найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел a, b. Знайдіть $(2010^a - 1, 2010^b - 1)$.

8. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з основою BC та гострим кутом при вершині відмічена точка P така, що $\angle BPC = 2\angle BAC$. Нехай K – основа перпендикуляра, опущеного з A на пряму, якій належить бісектриса кута, суміжного з кутом $\angle BPC$. Доведіть, що $BP + PC = 2AK$.