

XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

10 клас

Перший день

10.1. Альоша та Варя тренуються в розкладанні натуральних чисел на прості множники. Альоша розкладає на прості множники число $200^2 \cdot 201^2 \cdot \dots \cdot 900^2$, а Варя – число $(200^2 - 1) \cdot (201^2 - 1) \cdot \dots \cdot (900^2 - 1)$. Після цього кожний підраховує кількість різних простих дільників у своєму розкладі. У кого вийде більше число: у Варі чи у Альоші?

10.2. На шахівниці розміром 2009×2009 у лівому нижньому куті стоїть шаховий кінь, при цьому лівий стовпчик та нижній рядок фарбуються у червоний колір. Кінь ходить по шахівниці за правилами ходів шахової фігури, але може ставати лише на чорні та білі поля (не на червоні) і при попаданні коня на чергове поле у червоний колір фарбуються стовпчик та рядок поля, на яке став чергових ходом кінь. Чи можна за таких умов пофарбувати усю шахівницю у червоний колір?

10.3. В трикутнику ABC точки M і N – середини сторін BC і AC відповідно. Всередині цього трикутника взято точку P таку, що $\angle BAP = \angle PCA = \angle MAC$. Довести, що $\angle PNA = \angle AMB$.

10.4. Знайти усі такі функції $f: R \rightarrow R$, які $\forall x, y \in R$ задовольняють рівність:
 $f(x + xy + f(y)) = (f(x) + \frac{1}{2})(f(y) + \frac{1}{2})$.

XLIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2009

10 клас

Другий день

10.5. Попарно різні дійсні числа a, b, c задовольняють умову $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$.

Знайдіть, яких значень може набувати добуток abc :

а) для довільних дійсних a, b, c ;

б) для додатних дійсних a, b, c ?

10.6. Знайдіть усі прості числа p та натуральні числа m , які задовольняють рівняння: $2p^2 + p + 9 = m^2$.

10.7. Задане гральне поле $n \times n$, у якому проведена лише зовнішня межа, а усі внутрішні лінії між квадратами 1×1 витерті. Варя і Таня по черзі проводять межі у клітинок. За один хід дозволяється провести рівно один відрізок довжини 1, що розділяє дві клітини всередині квадрату, якщо цей відрізок ще не був проведений. Гра закінчується, якщо після чергового ходу усі клітини квадрату розбиваються на дві відокремлені частини, тобто з довільної клітини однієї частини дошки ходами шахової тури не можна потрапити в клітини, що належать іншій частині, не перетнувши при цьому проведені відрізки. Гравець, після ходу якого це трапилось, вважається таким, що програв. Хто з гравців може забезпечити собі виграш, якщо першою робить свій хід Варя?

10.8. На більшій діагоналі AC та на стороні DC паралелограма $ABCD$, як на діаметрах, побудовані кола k_1 та k_2 відповідно. Коло k_1 перетинає пряму AB в точці E . Коло k_2 перетинає пряму AC в точках C і O , а пряму AD – в точці F . Відомо, що $AO = a$, $FO = b$ і кут $\angle BAC = 45^\circ$. Знайдіть відношення площ трикутників AOE та COF .