

# XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

## 11 клас

### Перший день

**11.1.** При яких значеннях параметра  $\alpha$  рівняння  $|x - \frac{1}{2}| + |x - \sin \alpha| = \cos 3\alpha$  має єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.

**11.2.** Знайдіть усі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такі що для будь-яких дійсних  $x$  та  $y$  виконується умова:

$$f(f(y) + 2 + x) + f(f(y) - x) = yf(y)(x + 1).$$

**11.3.** Дано трикутник  $ABC$  всередині якого існує така точка  $O$ , що  $\angle BOC = 90^\circ$  та  $\angle BAO = \angle BCO$ . Точки  $M$  і  $N$  — середини сторін  $AC$  і  $BC$  відповідно. Доведіть, що кут  $\angle OMN$  — прямий.

**11.4.** Знайти кількість розв'язків у натуральних числах рівняння

$$[a^2, b^2] + [b^2, c^2] + [c^2, a^2] = (a^2, b^2)(b^2, c^2)(c^2, a^2),$$

де через  $[m, n]$  та  $(m, n)$  позначені, відповідно, НСК та НСД натуральних чисел  $m$  та  $n$

# XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

## 11 клас

### Другий день

**11.5.** Послідовність  $\{f_n\}$  задається наступним чином:  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 2$ ,  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  для довільного натурального  $n$ . Яка найбільша кількість членів послідовності  $\{f_n\}$  може бути серед послідовних членів зростаючої арифметичної прогресії?

**11.6.** У країні є  $n$  міст. Компанія монополіст хоче установити повітряне сполучення між деякими містами. Уряд вимагає, щоб повітряне сполучення між містами задовольняло таким умовам: щоб з кожного міста можна було дістатися до будь-якого іншого за один або декілька перельотів, а також з кожного міста виходила однакова кількість рейсів. Зауважимо, що рейсом між містами  $A$  та  $B$  вважають сукупність двох перельотів — з міста  $A$  в  $B$  та з міста  $B$  в  $A$ , а також між двома містами може існувати щонайбільше один рейс. Але компанія хоче зробити так, щоб можна було закрити якомога меншу кількість рейсів, і вже не з кожного міста можна було дістатися до будь-якого іншого. Яку найменшу кількість рейсів треба буде закрити компанії, якщо:

а)  $n = 2008$ ;

б)  $n = 2007$ ?

**11.7.** Доведіть, що для довільних невід'ємних дійсних чисел  $x, y, z$ , таких що  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ , має місце нерівність 
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y + z}} + \frac{y}{\sqrt{x + y^2 + z}} + \frac{z}{\sqrt{x + y + z^2}} \leq \sqrt{3}.$$

**11.8.** В гострокутному трикутнику  $ABC$  точки  $A_0, B_0, C_0$  — основи висот. Всередині трикутника відмічені такі точки  $A_1, B_1, C_1$ , що  $\angle A_1BC = \angle A_1AB$ ,  $\angle A_1CB = \angle A_1AC$ ,  $\angle B_1CA = \angle B_1BC$ ,  $\angle B_1AC = \angle B_1BA$ ,  $\angle C_1BA = \angle C_1CB$ ,  $\angle C_1AB = \angle C_1CA$ . Точки  $A_2, B_2$  та  $C_2$  — середини відрізків  $AA_1, BB_1$  та  $CC_1$  відповідно. Доведіть, що прями  $A_0A_2, B_0B_2$  та  $C_0C_2$  перетинаються в одній точці.