

# XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

## 8 клас

### Перший день

**8.1.** Для деяких дійсних чисел  $x, y, z$  має місце рівність  $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = \frac{3}{2}$ . Які значення може приймати вираз  $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$ ?

**8.2.** З'ясуйте, яких п'ятицифрових чисел більше: тих, у яких цифри йдуть у строго зростаючому порядку зліва направо, або тих, у яких кожна цифра не перевищує 5 та цифри йдуть у неспадному порядку зліва направо (наприклад, число 12459 задовольняє першій умові, а 22589 та 01234 — ні; число 11145 задовольняє другій умові, а 21224, 12346 та 01234 — ні)?

**8.3.** На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $M$  так, що  $BM = AC$ . Точка  $H$  — основа перпендикуляра, проведеного з точки  $B$  на пряму  $AM$ . Відомо, що  $BH = CM$  і  $\angle MAC = 30^\circ$ . Знайдіть градусну міру кута  $\angle ACB$ .

**8.4.** Розв'яжіть в цілих невід'ємних числах  $n, m, k$  рівняння:  $3^n + 4^m = 5^k$ .

## XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

### 8 клас

#### Другий день

8.5. Відомо, що при деякому натуральному  $n$  десятковий запис числа  $n^2 + 2008n$  закінчується цифрою 4. Знайдіть цифру десятків цього числа.

8.6. Є п'ять купок, в яких лежить 42, 70, 105, 462 та 2009 камінців. Дозволяється проводити такі операції: замість двох купок, в яких було  $a$  і  $b$  камінців утворити

- дві купки, які містять  $a$  і  $(a + b)$  камінців;
- дві купки, які містять  $a$  і  $|a - b|$  камінців.

Також можна вибрати  $k$  різних купок, загальна кількість камінців в яких дорівнює  $nk$ , де  $n$  — деяке натуральне число, та замість них утворити

- $k$  купок по  $n$  камінців в кожній.

Чи можна за скінченну кількість кроків одержати 5 купок, в кожній з яких буде по:

а) 2008 камінців;

б) 2009 камінців?

8.7. В чотирикутнику  $ABCD$  діагоналі  $AC$  і  $BD$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що діагональ  $BD$  перпендикулярна стороні  $AD$ ,  $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$ ,  $\angle ADC = 135^\circ$ . Знайдіть відношення  $DO : OB$ .

8.8. У Петра є декілька однакових білих квадратиків розміром  $4 \times 4$ . Кожну клітинку  $1 \times 1$  кожного квадрата він фарбує у червоний або синій колір у такий спосіб, щоб серед усіх стовпчиків усіх квадратиків не було двох однаково пофарбованих, і серед усіх рядків усіх квадратиків не було двох однаково пофарбованих. Повертати та перегортати квадратики не можна. Яку найбільшу кількість квадратиків таким чином Петрик може зафарбувати?