XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

11 клас

Перший день

11.1. Фігура на координатній площині задана рівнянням:

$$9(x+y+4)^2+4(x-y+2)^2=36.$$

Довести, що ця фігура має центр симетрії і знайти його координати.

11.2. На клітчастій дошці розміром $n\times n$ двоє гравців по черзі малюють многокутники (не обов'язково опуклі) одиничної площі з вершинами у вузлах сітки. Забороняється малювати многокутник, який має спільні точки з вже намальованими. Програє той, хто не може намалювати черговий многокутник. Хто виграє у цій грі?

11.3. Нехай $P(x)$ – такий многочлен, що $P(n)=1^{2008}+2^{2008}+\ldots+n^{2008}$ для всіх натуральних n. Знайдіть $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

11.4. Знайти усі функції $f:R\to R$, які задовольняють умови:

1) для всіх дійсних значеннях x,y справджується рівність:

$$f\big(f(x)y+x\big)=xf(y)+f(x);$$

2) рівняння $f(t)=-t$ має єдиний розв'язок.

XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

11 клас

Другий день

11.5. Довести, що існує нескінченна кількість таких натуральних чисел n, що кожний з проміжків $\left(n; n+2007\sqrt{n}\right)$ не містить жодного числа виду m^3, m^5, m^7, де m – натуральне число.

11.6. У країні Карнавалії 669 міст, деякі з яких з'єднані дорогами з одностороннім рухом. Кожний день у довільних двох містах проводять карнавал, на час якого всі дороги, що входять і виходять з цих міст, перекриваються. Але схема доріг в Карнавалії влаштована так, що мешканці інших 667 міст можуть проїхати з будь-якого одного міста в будь-яке інше скориставшись однією або декількома дорогами, не порушуючи правил руху. Яка найменша кількість доріг може бути в Карнавалії?

11.7. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$, $n > 1$ – набір різних чисел з проміжку $[0,1]$. Позначимо через A_k середнє арифметичне всіх можливих добутків різних k елементів набору. Доведіть, що послідовність A_k незростаюча.

11.8. В гострокутному трикутнику ABC проведена бісектриса AA_1, точка M – її середина. На відрізку BM існує така точка P, що кут APC дорівнює $90°$, на відрізку CM існує така точка Q, що $\angle AQB = 90°$. Доведіть, що точки P, M, Q, A_1 належать одному колу.