XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

9 клас

Перший день

9.1. При яких дійсних значеннях параметра a нерівність

$$\left(ax^2+4(a+1)x+4a+1\right)\left((4a+1)x^2+4(a+1)x+a\right)\geq 0$$

виконується при всіх дійсних значеннях x ?

9.2. На прямокутній клітчастій дошці в лівому нижньому куті стоїть тура. Двоє гравців ходять по черзі. Перший за один хід пересуває туру на будь-яку кількість клітинок по вертикалі вгору чи вниз, а другий – по горизонталі вправо чи вліво. Якщо під час гри тура перетнула клітину (зупинялась на ній або проходила вздовж), то ще раз перетинати таку клітину забороняється. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє у цій грі, якщо дошка має розміри

а) 2007×2007;

б) 2006×2007 (2006 клітин по вертикалі)?

9.3. Знайдіть усі пари натуральних чисел (n,m), які задовольняють рівняння:

$$4^n+n\cdot 2^{n+1}+2n^2=m^2+4.$$

9.4. Усередині трикутника ABC з кутами $\angle C=90^\circ$ та $\angle A=60^\circ$ є така точка O, що $\angle AOB=120^\circ$, $OC=1$, $OB=4$. Знайдіть довжину відрізка AO.

XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

9 клас

Другий день

9.5. В опуклому семикутнику $ABCDEFG$ паралельними є відрізки: AC і EF, BD і FG, CE і GA, DF і AB, EG і BC та FA і CD. Доведіть, що відрізки GB і DE також паралельні.

9.6. Упорядковану пару чисел (a,b) дозволяється замінити на одну з таких чотирьох пар: $\left(a\pm\frac{2}{b},b\right)$ при $b\neq 0$, $\left(a,b\pm\frac{2}{a}\right)$ при $a\neq 0$.

а) Отримайте за допомогою цих операцій з пари $(2007\ ,\ 2)$ пару $(2\ ,\ -2007)$.

б) Доведіть, що при будь-якому способі отримання з пари $(2007\ ,\ 2)$ пари $(2\ ,\ -2007)$ в деякий момент було отримано пару з однією нульовою компонентою.

9.7. В опуклому 2007-кутнику усі сторони та діагоналі пофарбовано в один з k кольорів. Довільні три вершини многокутника задають такий трикутник, що принаймні дві його сторони мають однаковий колір. Знайдіть усі значення k, при яких таке розфарбування можливе.

9.8 Розв’яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} |x_1 - x_2| = ax_3, \\ |x_2 - x_3| = ax_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |x_{2005} - x_{2006}| = ax_{2007}, \\ |x_{2006} - x_{2007}| = ax_1, \\ |x_{2007} - x_1| = ax_2, \end{cases}$$

якщо параметр a задовольняє умові:

а) $a > 1$;

б) $a = 1$.